Coassociative部分多様体の具体的構成 (部分多様体の微分幾何学の深化)

河井, 公大朗

数理解析研究所講究録
第1880巻 2014年 23-31

Coassociative部分多様体の具体的構成

東北大学大学院理学研究科数学専攻　河井　公大朗
Kotaro Kawai
Mathematical Institute, Tohoku University *

実7次元のリーマン多様体 (Y, g) のホロノミー群が例外型 Lie 群 G_2 に含まれるとき、(Y, g) は G_2 多様体であるという。G_2 多様体は Y 上の3次微分形式 φ により特徴づけられる。φ の制限が常に0になるような4次元部分多様体を coassociative 部分多様体という。特に $SU(3) \subset G_2$ より、(3次元カラビ・ヤウ多様体) $\times \mathbb{R}$ は G_2 多様体であり、(phase $-i$ の特殊ラグランジュ部分多様体) $\times \mathbb{R}$ はその中の coassociative 部分多様体になる。近年はミラー対称性の観点 [3] からも注目を集めており、今回はその具体的構成を考える。

1　準備

1.1　Calibrated Geometry

ケーラー多様体のコンパクト複素部分多様体が、そのホモロジー類の中で体積を最小にすることは、Wirtinger の不等式として知られている。この概念を一般化し、Harvey と Lawson [4] は calibration の概念を導入した。

定義 1. (Y, g) を m 次元リーマン多様体とし、φ を Y 上の $k (1 \leq k \leq m)$ 次微分形式とする。任意の向きづけられた k 次元部分空間 $V \subset T_pM, p \in M$ に対して、

$$\varphi|_V \leq \mathrm{vol}_V$$

を満たすとき、φ は Y 上の **calibration** と呼ばれる。

$N \subset M$ を向きづけられた k 次元部分多様体とする。N は

$$\varphi|_N = \mathrm{vol}_N$$

をみたすとき、Y の **calibrated submanifold (φ-submanifold)** と呼ばれる。

*日本学術振興会特別研究員 PD (課題番号:24-3603)
e-mail: sb1d07@math.tohoku.ac.jp

リーマン多様体のホロノミー群を用いると、自然な calibration、calibrated submanifold が定義される。以下にいくつか例を示す。

$\mathrm{Hol}(g)$ $(\subset)$	$\mathrm{U}(m)$	$\mathrm{SU}(m)$	G_2
(M,g)	ケーラー	カラビ・ヤウ	G_2
φ	$\omega^k/k!$ (ω: ケーラー形式)	$\mathrm{Re}(e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega)$ (Ω: 正則体積要素)	$\varphi\in\Omega^3$ $(*\varphi\in\Omega^4)$ (φ: G_2 構造)
φ-submanifolds	k 次元複素 部分多様体	特殊ラグランジュ 部分多様体	(co)associative 部分多様体

これらの部分多様体は、ミラー対称性の観点など様々な方面から注目を集めている。一方、これらは非線形偏微分方程式で定義され、具体的な構成は非常に難しい。以下ではこの具体的構成法について述べる。

1.2 G_2 幾何学

定義 2. $\mathbb{R}^7$ 上の 3-form φ_0 を次で定義する。

$$\varphi_0=e^{125}-e^{345}+e^{136}-e^{426}+e^{147}-e^{237}+e^{567},$$

ここで $(e^1,\cdots,e^7)$ は $\mathbb{R}^7$ の標準双対基底であり、外積の記号は省略してある。φ_0 の固定部分群は例外型 Lie 群 G_2 となる。

$$G_2=\{g\in GL(7,\mathbb{R});g^*\varphi_0=\varphi_0\}$$

Lie 群 G_2 は、$\mathbb{R}^7$ 上の向き、標準計量 $g_0=\sum_{i=1}^7(e^i)^2$、および φ の Hodge 双対

$$*\varphi_0=e^{3467}-e^{1267}+e^{2457}+e^{1357}+e^{2356}-e^{1456}+e^{1234},$$

も固定する。これらは次の関係式より φ_0 から一意的に定まる。

$$-6g_0(v_1,v_2)\mathrm{vol}_{g_0}=i(v_1)\varphi_0\wedge i(v_2)\varphi_0\wedge\varphi_0,$$

ここで vol_{g_0} は g_0 の体積要素、$i(\cdot)$ は内部積を表し、 $v_i\in T(\mathbb{R}^7)$ である。

定義 3. Y を 向きづけられた 7-次元多様体とし、φ を Y 上の 3-form とする。各 $y\in Y$ に対し、T_yY と $\mathbb{R}^7$ の間に向きを保つ同型があり、それによって φ_y と φ_0 が同一視されるとき、3-form φ は Y 上の G_2 **構造** と呼ばれる。(1.1) より φ から、Y 上のリーマン計量 g、体積要素、$*\varphi\in\Omega^4(Y)$ が誘導される。$\varphi\in\Omega^3(Y)$ が Y 上の G_2-構造であり、g がそれから誘導される計量であるとき、(Y,φ,g) は G_2 **多様体** と呼ばれる。更に $d\varphi=d*\varphi=0$ を満たすとき、G_2 多様体 (Y,φ,g) は **torsion-free** と呼ばれる。

補題 4. *[2]* (Y, φ, g) を G_2 多様体とする。このとき $\mathrm{Hol}(g) \subset G_2$ であることと、$d\varphi = d * \varphi = 0$ であることは同値である。

補題 5. *[4]* (Y, φ, g) が *torsion-free* G_2-多様体のとき、G_2 構造 φ とその *Hodge* 双対 $*\varphi$ は Y 上の *calibration* を定める。

定義 6. [4] φ-submanifold を **associative 部分多様体** といい、$*\varphi$-submanifold を **coassociative 部分多様体** という。

coassociative 部分多様体は、次のようにより扱いやすい定義がある。

補題 7. *[4]* $L \subset Y$ を向きづけられた *4* 次元部分多様体とする。このとき L が *coassociative* であることと、$\varphi|_L = 0$ であることは同値である。

2 各種構成方法

先行研究のうち、代表的なものについて述べる。

2.1 Lie 群の対称性を用いた例の構成

この手法は、極小部分多様体に対して Hsiang, Lawson [6] により提唱された。今回はこの手法を用いて構成する。次節においてその手法を詳細に述べる。

この手法で、特殊ラグランジュ部分多様体の例も構成されている ([5], [8])。

2.2 発展方程式による手法

この構成は次の事実に基づく。

事実 8. *[4]* $P^3 \subset \mathbb{R}^7$ を実解析的な *3* 次元部分多様体で $\varphi|_P = 0$ とする。このとき P を含む *coassociative* 部分多様体 N が存在する。

$\iota : P \hookrightarrow \mathbb{R}^7$ をはめ込みとする。はめ込みの族 $\{\iota_t : P \hookrightarrow \mathbb{R}^7\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ で、$\cup_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}\mathrm{Im}(\iota_t)$ が coassociative となるものを探す。一般の P に対してこれを行うのは難しいが、P が $G_2 \ltimes \mathbb{R}^7$ の 3 次元部分群の軌道である場合に、Lotay [11] は具体例を構成した。

2.3 束の構造を用いた構成

$M^4 = \mathbb{R}^4, S^4$ or $\mathbb{C}P^2$ とすると、$\Lambda^2_- M^4$ は G_2 多様体になることが知られている。$\Sigma^2 \subset M^4$ を 2 次元極小部分多様体とし、その上のある階数 2 のベクトル束が coassociative となる条件を考える。

$M = \mathbb{R}^4$ の場合は、Ionel, Karigiannis, Min-Oo [7] によって、$M = S^4, \mathbb{C}P^2$ の場合は Karigiannis, Min-Oo [9] により構成された。

2.4 Isometric involutionを用いた構成

$\sigma: Y \to Y$ を微分同相で、$\sigma^* g = g, \sigma^* \varphi = -\varphi, \sigma \neq id, \sigma^2 = id$ となるものとする。このとき、σ の固定点集合は coassociative となる。

この手法は Joyce [10] により $\mathrm{Hol}(g) = G_2$ となるコンパクト G_2 多様体 (Y, φ, g) 上での構成に用いられた。($\mathrm{Hol}(g) = G_2$ となるコンパクト G_2 多様体の構成は非常に難しく、Joyce は最初の例を与えた。)

3 Lie群の対称性を用いた例の構成

coassociative 部分多様体 L の構成のために、L がある Lie 群 G の作用によって保たれると仮定する。よく知られているように、G が L に余等質性1に作用しているとき、coassociative となる条件の偏微分方程式は、軌道空間上の1階の常微分方程式に帰着される。この手法は次のようにまとめられる。

命題 9. (Y, φ, g) を G_2 多様体とする。*Lie* 群 G が Y に作用しており、その作用は φ を定数倍を除いて保ち、かつ G の主軌道の次元は *3* とする。

1. 以下のような部分集合 $\Sigma \subset Y$ を見つける。(Σ は軌道空間 "Y/G" と思える。)

- $G \cdot \Sigma = \{g \cdot x \in Y; g \in G, x \in \Sigma\} = Y$,
- $T_x\Sigma \cap T_x(G\text{-}orbit) = \{0\}$ $(\forall x \in \Sigma)$,

ここで $T_x(G\text{-}orbit)$ は、点 x における *G-orbit* 方向の接空間。

2. 以下の条件を満たす *path* $c: I \to \Sigma$ *(*$I \subset \mathbb{R}$*:* 開区間*)* を探す。

$$\varphi(v_1^*, v_2^*, v_3^*)|_c = 0, \quad \varphi(v_i^*, v_j^*, \dot{c})|_c = 0 \quad (\forall v_i \in \mathfrak{g} = Lie(G)),$$

ここで $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$、v^* は $v \in \mathfrak{g}$ で生成される Y 上のベクトル場。

3. このとき $L := G \cdot \mathrm{Image}(c)$ は G 不変な部分多様体となる。

この手法の利点として、構成された部分多様体内の特異軌道がわかりやすく、位相を解析しやすい点が挙げられる。

4 $\mathbb{R}^7$ 上での構成

4.1 $\mathbb{R}^7$ 上の G_2 構造

$\mathbb{R}^7$ を $\Lambda^2_-\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$ と同一視し、(y^1, y^2, y^3, y^4) を $\mathbb{R}^4$ の標準的な座標とする。2-form ω_i と 1-form b^j $(i, j = 1, 2, 3)$ を

$$\omega^1 = dy^{12} - dy^{34}, \omega^2 = dy^{13} - dy^{42}, \omega^3 = dy^{14} - dy^{23}, b^j = da^j,$$

と定める。ここで (a^1, a^2, a^3) は $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ に関するファイバー座標である。このとき $\mathbb{R}^7$ 上の G_2 構造 φ は次のようにかける。

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3} b^i \wedge \omega^i + b^{123}.$$

4.2 $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合

$\mathrm{SU}(2)$ の $\mathbb{R}^7$ への作用として、$\mathrm{SU}(2)$ の $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ への標準的な作用から $\Lambda^2_-\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^7$ に誘導されるものを考える。このとき "軌道空間" Σ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
&\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3,\\
&\Sigma_1 = \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\},\\
&\Sigma_2 = \{(0, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; \sum_{i=1}^{3} |a^i|^2 > 0\},\ \Sigma_3 = \{0\},
\end{aligned}$$

このとき $\mathrm{SU}(2) \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$ となり、軌道の位相は次のようになる。

$$\mathrm{SU}(2) \cdot x \cong \begin{cases} S^3 & (x \in \Sigma_1),\\ S^2 & (x \in \Sigma_2),\\ * & (x \in \Sigma_3). \end{cases}$$

$\mathrm{SU}(2)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の基底 $\{X_1, X_2, X_3\}$ を次で定める。

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

これは $[X_j, X_{j+1}] = X_{j+2} (j \in \mathbb{Z}/3)$ を満たす。このとき path $c : I \to \Sigma$ で、

$$\begin{aligned}
\varphi(X_1^*, X_2^*, X_3^*)|_c &= 0,\\
\varphi(X_i^*, X_j^*, \dot{c})|_c &= 0 \quad (1 \le i, j \le 3).
\end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これを解くと、c は次の形になる。

$$\{((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}) \in \mathbb{R}^7; r(4r^2 - 5(y^1)^2)^2 = C, r \ge 0\}$$

$(\vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$、$C \ge 0)$ そして次の Harvey, Lawson による例を再構成できる。

定理 10 (Harvey and Lawson [4]). 任意の $\vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$、$C \ge 0$ に対して、

$$M_C := \mathrm{SU}(2) \cdot \{((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v}) \in \mathbb{R}^7; r(4r^2 - 5(y^1)^2)^2 = C, r \ge 0\}$$

は $\mathbb{R}^7$ の $\mathrm{SU}(2)$ 不変 *coassociative* 部分多様体である。更に、この $\mathrm{SU}(2)$ 作用で不変な *coassociative* 部分多様体はすべてこの形にかける。

$C>0$ のとき、M_C は次の 2 つの連結成分 $M_C^{\pm}$ を持つ。

$$M_C^{\pm} := M_C \cap \mathrm{SU}(2)\cdot\left\{((y^1,0,0,0),r\vec{v})\in\mathbb{R}^7;\pm(4r^2-5(y^1)^2)>0\right\}$$

M_C^+ (resp. M_C^-) は $\mathbb{C}P^1\cong S^2$ 上の自然束 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)$ (resp. $S^3\times\mathbb{R}$) と同型である。$C=0$ のとき

$$M_0 = M_0^0 \sqcup M_0^{'},\ M_0^0=\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{(y^1,0,0,0,0,0,0);y^1\geq 0\right\},$$
$$M_0^{'}=\mathrm{SU}(2)\cdot\left\{y^1\cdot\left((1,0,0,0),\tfrac{\sqrt{5}}{2}\vec{v}\right)\in\mathbb{R}^7;y^1>0\right\},$$

となり、M_0^0 は 平坦な $\mathbb{R}^4$、$M_0^{'}$ は *Hopf fibration* $S^3\to S^2$ のグラフ上の錐で、$S^3\times\mathbb{R}$ に同型である。

4.3 $G=T^2\times\mathbb{R}_{>0}$ の場合

$T^2\times\mathbb{R}_{>0}$ の $\mathbb{R}^7$ への作用を次で定める。

$$(e^{i\theta},e^{i\psi},R)\cdot(z^1,z^2,a^1,w)=(Re^{i\theta}z^1,Re^{i\psi}z^2,Ra^1,Re^{i(\psi-\theta)}w),$$

ここで $(e^{i\theta},e^{i\psi},R)\in T^2\times\mathbb{R}_{>0}$, $(z^1,z^2,a^1,w)\in\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}=\mathbb{R}^7$ である。このとき "軌道空間" Σ は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
&\Sigma=\Sigma_1\sqcup\Sigma_2\sqcup\Sigma_3\sqcup\Sigma_4\sqcup\Sigma_5\sqcup\Sigma_6,\\
&\Sigma_1=\{(y^1,0,y^3,0,a^1,a^2,a^3)\in S^6;y^1,y^3\geq 0,|y^1|^2+|y^3|^2>0\},\\
&\Sigma_2=\{(y^1,0,y^3,0,a^1,a^2,0)\in S^6;\#\{x=0;x\in\{y^1,y^3,a^2\}\}=2\},\\
&\Sigma_3=\{(0,0,0,0,1,0,0)\},\ \Sigma_4=\{0\}.
\end{aligned}$$

このとき $T^2\times\mathbb{R}_{>0}\cdot\Sigma=\mathbb{R}^7$ となり、軌道の位相は次のようになる。

$$T^2\times\mathbb{R}_{>0}\cdot x\cong\begin{cases} T^2\times\mathbb{R}_{>0} & (x\in\Sigma_1),\\ S^1\times\mathbb{R}_{>0} & (x\in\Sigma_2),\\ \mathbb{R}_{>0} & (x\in\Sigma_3),\\ * & (x\in\Sigma_4).\end{cases}$$

T^2 の Lie 環 $\mathfrak{t}^2$ の基底を $X_1=(1,0),X_2=(0,1)\in\mathbb{R}^2\cong\mathfrak{t}^2$ とする。このとき path $c:I\to\Sigma$ で、

$$\begin{aligned}
\varphi(X_1^*,X_2^*,r\tfrac{\partial}{\partial r})|_c &= 0,\\
\varphi(X_1^*,X_2^*,\dot{c})|_c &= 0,\\
\varphi(X_1^*,r\tfrac{\partial}{\partial r},\dot{c})|_c &= 0,\\
\varphi(X_2^*,r\tfrac{\partial}{\partial r},\dot{c})|_c &= 0.
\end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これより、次の定理を得る。

定理 11. $\alpha, \gamma : I \to (0, \pi/2)$, $\beta : I \to \mathbb{R}$ を、開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の滑らかな関数で、

$$\frac{d}{dt}\log(\sin\gamma) = -\frac{2\tan\beta \cdot \tan(2\alpha - \beta) \cdot \dot{\beta}}{\tan(2\alpha - \beta) + 3\tan\beta},$$
$$\frac{d}{dt}\log(\tan\gamma) = -\tan(2\alpha - \beta) \cdot (\dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

を満たすとする。このとき、次の部分集合 $M \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^7$

$$M = \big\{ \big(Re^{i\theta}\cos\gamma(t) \cdot \cos\alpha(t), Re^{i\psi}\cos\gamma(t) \cdot \sin\alpha(t),$$
$$R\sin\gamma(t) \cdot \cos\beta(t), Re^{i(\psi - \theta)}\sin\gamma(t) \cdot \sin\beta(t) \big) \, ; R > 0, \theta, \psi \in \mathbb{R}, t \in I \big\}$$

は T^2 不変 *coassociative cone* で、十分小さい $I \subset \mathbb{R}$ に対して $M \cong T^2 \times \mathbb{R}_{>0} \times I$ となる。

5 $\Lambda^2_- S^4$ 上での構成

5.1 $\Lambda^2_- S^4$ 上の G_2 構造

S^4 の反自己双対束 $\Lambda^2_- S^4$ には、[1] により完備な G_2 計量 $g_\lambda (\lambda > 0)$ が入ることが知られている。$\Lambda^2_- S^4$ は S^4 の Levi-Civita 接続から誘導される接続を持つから、接空間は水平、垂直方向への自然な分解 $T_\omega(\Lambda^2_- S^4) \cong \mathcal{H}_\omega \oplus \mathcal{V}_\omega$ $(\omega \in \Lambda^2_- S^4)$ を持つ。

命題 12 (Bryant and Salamon [1], [9]). 各 $\lambda > 0$ に対して、$\Lambda^2_- S^4$ 上の *3-form* $\varphi_\lambda \in \Omega^3(\Lambda^2_- S^4)$ と計量 g_λ を次のように定める。

$$\varphi_\lambda = 2s_\lambda d\tau + \frac{1}{s_\lambda^3}\mathrm{vol}_\mathcal{V}, \ g_\lambda = 2s_\lambda^2 g_\mathcal{H} + \frac{1}{s_\lambda^2} g_\mathcal{V}$$

ここで $s_\lambda = (\lambda + r^2)^{1/4}$, r は S^4 からの誘導計量で測った零切断からの距離。τ は *tautological 2-form* で、$\mathrm{vol}_\mathcal{V}$ はファイバー上の計量 $g_\mathcal{V}$ に関する体積要素である。

このとき各 $\lambda > 0$ に対して、$(\Lambda^2_- S^4, \varphi_\lambda, g_\lambda)$ は *torsion-free* G_2 多様体となり、g_λ は完備で $\mathrm{Hol}(g_\lambda) = G_2$ を満たす。

注意 13. $\Lambda^2_- S^4 - \{0 - \text{section}\} \cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$ であり、$\lambda = 0$ のとき、計量 g_0 は $\mathbb{C}P^3$ 上の錐計量になる。$\mathbb{C}P^3$ 上の計量 $g_{\mathbb{C}P^3}$ は標準的な計量ではなく、3-symmetric Einstein の非ケーラー計量になる。g_0 は完備ではないが、$\mathrm{Hol}(g_0) = G_2$ を満たす。

5.2 $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合

$\mathrm{SU}(2)$ の $\Lambda^2_- S^4$ への作用として、$\mathrm{SU}(2)$ の $S^4 \subset \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{R}$ への標準的な作用から誘導されるものを考える。S^4 の局所座標

$$\begin{array}{ccccc} S^4 - \{x^5 = 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 & & \\ \Psi & & \Psi & & \\ (x^1, \cdots, x^5) & \longmapsto & \left(\frac{x^1}{1 - x^5}, \cdots, \frac{x^4}{1 - x^5} \right) & =: & (y^1, \cdots, y^4). \end{array}$$

をとり、それに随伴する$\Lambda^2_- S^4$のファイバー座標(a^1, a^2, a^3)を取る。このとき、$\mathbb{R}^7$の場合同様"軌道空間"Σは次のようにかける。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3, \\ \Sigma_1 &= \{(y^1, 0, 0, 0, a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^7; y^1 > 0, a^i \in \mathbb{R}\}, \\ \Sigma_2 &= \Lambda^2_- S^4|_{x^5=-1} - \{0\} \sqcup \Lambda^2_- S^4|_{x^5=1} - \{0\},\ \Sigma_3 = \{x^5 = \pm 1\} \subset S^4, \end{aligned}$$

このとき$\mathrm{SU}(2) \cdot \Sigma = \mathbb{R}^7$となり、軌道の位相は次のようになる。

$$\mathrm{SU}(2) \cdot x \cong \begin{cases} S^3 & (x \in \Sigma_1), \\ S^2 & (x \in \Sigma_2), \\ * & (x \in \Sigma_3). \end{cases}$$

SU(2) の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の基底 $\{X_1, X_2, X_3\}$ を (4.1) のように定める。このとき path $c : I \to \Sigma$ で、

$$\begin{aligned} \varphi(X_1^*, X_2^*, X_3^*)|_c &= 0, \\ \varphi(X_i^*, X_j^*, \dot{c})|_c &= 0 \ \ (1 \le i, j \le 3). \end{aligned}$$

を満たすものを探せばよい。これを解くと、cは次の形になる。

定理 14. $\forall C \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対して、部分集合

$$M_C := \mathrm{SU}(2) \cdot \left\{ ((y^1, 0, 0, 0), r\vec{v});\ \begin{array}{c} -\int_0^{\sqrt{r}} (\lambda + a^4)^{1/8} da + \frac{(\lambda + r^2)^{1/8} \sqrt{r}}{1 + (y^1)^2} = C, \\ r \ge 0, y^1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \end{array} \right\},$$

は$\Lambda^2_- S^4$内の SU(2) 不変 *coassociative* 部分多様体であり、次の位相を持つ。

$$M_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)\ (C \ne 0), \quad S^4 \sqcup S^3 \times \mathbb{R}\ (C = 0).$$

更に、すべての SU(2) 不変部分多様体は上の形で与えられる。

これは定理 10 の一般化とも捉えられる。同様に$\Lambda^2_- S^4 - \{0 - \mathrm{section}\} \cong \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}_{>0}$上にも$T^2$不変 coassociative cone を構成でき、T^*S^2 ($S^2 \subset S^4$: 全測地的)、S^4内の小円上の階数 1 のベクトル束等が得られる。

参考文献

[1] R. L. Bryant and S. M. Salamon, On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, Duke Math. J. 58 (1989), 829-850.

[2] M. Fernández and A. Gray, Riemannian manifolds with structure group G_2, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 32 (1982), 19-45.

[3] S. Gukov, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Duality and fibrations on G_2-manifolds, Turkish J. Math. 27 (2003), 61-97.

[4] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. 148 (1982), 47-157.

[5] K. Hashimoto and T. Sakai, Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere, Tohoku Math. J., 64 (2012), no. 1, 141-169.

[6] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson, Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity, J. Differential Geom. 5, (1971), 1-38.

[7] M. Ionel, S. Karigiannis, and M. Min-Oo, Bundle constructions of calibrated submanifolds in $\mathbb{R}^7$ and $\mathbb{R}^8$, Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 4, 493-512.

[8] M. Ionel and M. Min-Oo, Cohomogeneity one special Lagrangian 3-folds in the deformed and the resolved conifolds. Illinois J. Math. 52 (2008), no. 3, 839-865.

[9] S. Karigiannis and M. Min-Oo, Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy, Ann. Global Anal. Geom., 28 (2005), 371-394.

[10] D.D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[11] J. D. Lotay, Calibrated Submanifolds of $\mathbb{R}^7$ and $\mathbb{R}^8$ with Symmetries, Q. J. Math. 58, (2007), 53-70.